

2017 年青少年數學國際城市邀請賽

參賽代表遴選決賽試題

_____縣市_____國民中學_____年級 編號：_____ 姓名：_____

作答時間：二小時

性別：男 女

第一部分：填充題，每小題 5 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後所附的空格上填入答案，只需填寫答案。
若答案為數值，請用阿拉伯數字；答案若為分數，請化為最簡分數)

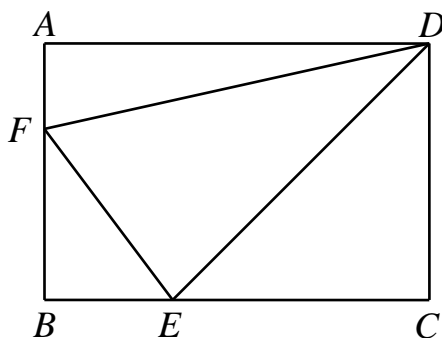
1. 將 $105^{2017} + 107^{2017}$ 除以 106 之後所得到的餘數為_____。

答：_____

2. 算式 $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 \times 4 \times 5 + \dots + 16 \times 17 \times 18 \times 19$ 之值為_____。

答：_____

3. 點 E 、 F 分別為長方形 $ABCD$ 兩條邊 BC 、 AB 上的點，使得 $\triangle ADF$ 的面積為 9 cm^2 、 $\triangle FBE$ 的面積為 6 cm^2 、 $\triangle CDE$ 的面積為 18 cm^2 ，如下圖所示，則長方形 $ABCD$ 的面積為_____ cm^2 。



答：_____ cm^2

4. 一個遞增數列由五個相異的正整數所組成，已知其首項為 5，且該數列中任意連續兩項的平方和也都是一個完全平方數。則此數列之末項的最小值為_____。

答：_____

5. 已知存在兩個實數 a 、 b 滿足 $a^2 + \sqrt{3}b = 4$ 、 $b^2 + \sqrt{3}a = 4$ 、 $a \neq b$ ，則 $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ 的值為_____。

答：_____

6. 已知 a 、 b 均為整數。若方程 $x^2 + ax + 2b = 0$ 之二根的平方和小於 12，則 ab 的最大值為_____。

答：_____

7. 滿足以下方程組 $\begin{cases} x+y=zt \\ z+t=xy \end{cases}$ 的四元正整數組 (x, y, z, t) 共有 _____ 組。

答： _____ 組

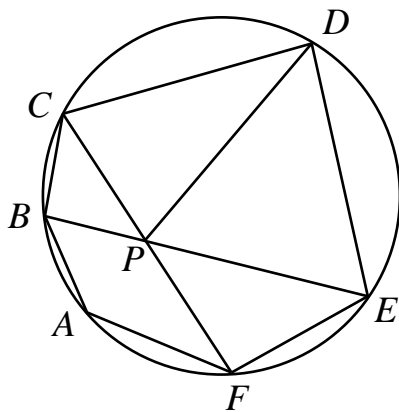
8. 用厚紙板剪出兩個全等的正 n 邊形，將它們上下重合起來，並用一枚大頭針穿過它們的中心。現將其上方的多邊形以大頭針為軸旋轉 32.5° ，發現它又與下方的多邊形重合。則 n 的最小值為 _____。

答： _____

9. 一個天平當秤盤內沒有放置砝碼時是平衡的。若在此天平的左秤盤內放置編號為 l_1, l_2, \dots, l_k 的 k 枚砝碼，右秤盤內放置編號為 r_1, r_2, \dots, r_k 的 k 枚砝碼，結果左邊的秤盤較重。如果交換任意兩枚足碼相同的砝碼，則總是右邊的秤盤變為較重或是兩邊平衡。則所有可能的 k 值之和為 _____。

答： _____

10. 已知六邊形 $ABCDEF$ 內接於一圓， BE 與 CF 相交於點 P 。若 $AB=BC$ ， $CD=DE$ ， $EF=FA$ 且有 $PB=2$ cm， $PF=3$ cm， $PD=5$ cm，則六邊形 $ABCDEF$ 的周長為 _____ cm。

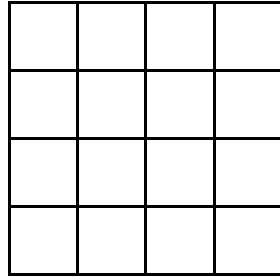


答： _____ cm

11. 某次宴會中連同小胡共有 26 位賓客，任意兩位賓客之間彼此互相認識或者彼此互相不認識。已知除了小胡以外的 25 位賓客所認識的賓客人數都互不相同，且每一位賓客都至少認識其他一位賓客，則小胡在此次宴會中總共認識 _____ 位賓客。

答： _____ 位

12. 在 4×4 的方格表上的每個小方格內各畫一條對角線，此對角線可將每一個小方格分成二個全等的直角三角形。將這 32 個直角三角形分別塗上黑色或白色中的一種，若方格表上任意兩個有共同邊的三角形所塗的顏色都不相同，稱這個圖案為「美圖」，則 4×4 的方格表總共有_____種不同的美圖。

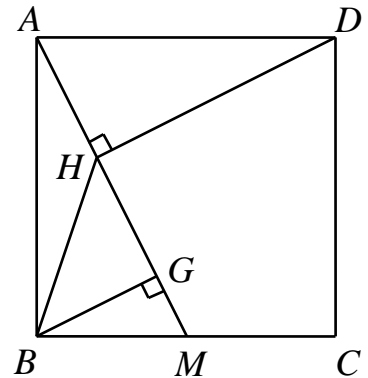


答：_____種

第二部分：計算證明，每題 20 分，共 60 分

(注意：請在每題試題後空白處作答，須詳列過程及說明理由)

1. 在正方形 $ABCD$ 中，若點 M 為邊 BC 的中點，過點 B 、 D 分別做 AM 的垂線，垂足分別為點 G 、 H ，如圖所示，請證明 $\angle GBH = 45^\circ$ 。



2. 將十個正整數 11、12、13、 \dots 、20 任意地排成一個圓圈，請證明必存在相鄰的三個正整數之和大於 47。

3. 現有 n 個相異的正整數，其中的每一個數都小於 2017，且任取兩個數的最小公倍數都大於 2017。請證明這些數的倒數之和小於 2。